

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

SEMAINE 6

Table des matières

1	Marché stochastique mono-devise (multi-risques)	3
1.1	Portefeuilles et autofinancement	3
1.2	Vecteur de volatilité versus volatilité spot	5
1.3	Absence d'opportunités d'arbitrage et conséquences	7
1.4	Un premier pas vers la valorisation risque-neutre	9
1.5	Valorisation risque-neutre	12

1 Marché stochastique mono-devise (multi-risques)

1.1 Portefeuilles et autofinancement

Marché sans friction. Prix en € .

Les actifs négociables de base :

- L'actif sans risque $S^0 = \text{le cash}$ €. Son rendement entre $[t, t + dt]$ est connu à la date t et vaut r_t
- d actifs risqués (**pas de sauts**) : $dS_t^i = S_t^i (b_t^i dt + \sum_{j=1}^k \sigma_j^i(t) d\widehat{W}_t^j)$ où $\widehat{W}$ est un MB k -dimensionnel (avec composantes indépendantes) modélisant les aléas de l'économie $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$.



Ici S^i a pour volatilité un vecteur (ligne) $\sigma_t^i := (\sigma_1^i(t), \dots, \sigma_k^i(t))$ (similaire à une décomposition ACP)

- Rendement $b_t = \begin{pmatrix} b_t^1 \\ \vdots \\ b_t^d \end{pmatrix}$ = vecteur ($\mathcal{F}$ -adapté) de taille d
- Volatilité $\sigma_t = (\sigma_j^i(t))_{ij}$ = matrice ($\mathcal{F}$ -adaptée) de dimension $d \times k$.

Portefeuille autofinçant : extension directe du cadre mono sous-jacent.

1. Stratégie de portefeuille : processus $\delta = (\delta_t^1, \dots, \delta_t^i, \dots, \delta_t^d)_t$ représentant les nombres investis dans chacun des titres risqués.

2. Montant en cash : π_t^0

3. Valeur liquidative du portefeuille à la date t : $V_t(\pi^0, \delta) = \pi_t^0 + \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i$

4. Portefeuille autofinçant si

$$V_t(\pi^0, \delta) = V_0 + \int_0^t \pi_u^0 r_u du + \sum_{i=1}^d \int_0^t \delta_u^i (dS_u^i + q_u^i S_u^i du) \text{ (avec div./repo)}.$$

5. Formulation équivalente :

$$dV_t = V_t r_t dt + (\delta S)_t \cdot (b_t + q_t - r_t \mathbf{1}) dt + (\delta S)_t \cdot \sigma_t d\widehat{W}_t$$

avec $(\delta S)_t = (\delta_t^1 S_t^1, \dots, \delta_t^d S_t^d)$ vecteur des montants investis, $\mathbf{1}$ = vecteur de composante 1.

➡ Equation entièrement déterminée par V_0 et $(\delta^1, \dots, \delta^d)$.

Réécriture sous forme actualisée :

$$d(e^{-\int_0^t r_s ds} V_t) = e^{-\int_0^t r_s ds} (\delta S)_t \cdot [\sigma_t d\widehat{W}_t + (b_t + q_t - r_t \mathbf{1}) dt].$$

1.2 Vecteur de volatilité versus volatilité spot

Définition. La volatilité spot de S^i est le processus $\sigma_t^{S^i} > 0$ donné par

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \dots dt + \sigma_t^{S^i} dB_t^i$$

pour un certain mouvement brownien unidimensionnel B^i .

Définition. La corrélation spot de S^i et S^j est le processus $\rho_t^{i,j}$ donné par

$$\left\langle \frac{dS_t^i}{S_t^i}, \frac{dS_t^j}{S_t^j} \right\rangle = \rho_t^{i,j} \sigma_t^{S^i} \sigma_t^{S^j} dt.$$

Lemme (théorème de Lévy de caractérisation du MB). Si

$dM_t = \sum_{j=1}^k a_j(t) d\widehat{W}_t^j$, alors $dM_t = \sqrt{\sum_{j=1}^k |a_j(t)|^2} dB_t$ pour un certain mouvement Brownien unidimensionnel B .

Corollaire. La volatilité spot de S^i est $\sigma_t^{S^i} = |\sigma_t^i| = \sqrt{\sum_{j=1}^k |\sigma_j^i(t)|^2}$ et la corrélation spot entre S^i et S^j est $\rho_t^{i,j} = \frac{\sigma_t^i \cdot \sigma_t^j}{|\sigma_t^i| |\sigma_t^j|}$.

Exercice. Quelles sont le vecteur de volatilité et la volatilité spot de

i) $U \times V$?

ii) $\frac{U}{V}$?

[en fonction de σ^U et σ^V].

Rappel sur des égalités de calcul stochastique très utiles :

$$\frac{d(U_t V_t)}{U_t V_t} = \frac{dU_t}{U_t} + \frac{dV_t}{V_t} + \left\langle \frac{dV_t}{V_t}, \frac{dU_t}{U_t} \right\rangle,$$

$$\frac{d\left(\frac{U_t}{V_t}\right)}{\frac{U_t}{V_t}} = \frac{dU_t}{U_t} - \frac{dV_t}{V_t} - \left\langle \frac{dV_t}{V_t}, \frac{dU_t}{U_t} - \frac{dV_t}{V_t} \right\rangle,$$

valable pour tous processus d'Itô U et V .

1.3 Absence d'opportunités d'arbitrage et conséquences

Définition (d'une opportunité d'arbitrage). Stratégie de portefeuille autofinancante vérifiant

1. $V_0(\delta) = 0$,
2. $V_T(\delta) \geq 0$ et $\mathbb{P}(V_T(\delta) \neq 0) > 0$.

Nécessité de restreindre la classe des stratégies de trading ($\Rightarrow$ stratégies **admissibles**).

Exemples de conditions :

- $V_t \geq c$ avec probabilité 1, pour un certain seuil c fixe
- $\mathbb{E}(\int_0^T |\sigma_s^*(\delta S)_s|^2 ds) < \infty$

Hypothèse fondamentale : il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage entre des stratégies de portefeuille admissibles (marché **viable**).

Ex. de use-case à exclure : la "doubling strategy" n'est pas admissible (correspond à $V_0 = 1, \delta_t = 1\sqrt{T-t}$).

Théorème (Lien rendement-risque en AOA et existence de prime de risque).

- i) Un portefeuille admissible **localement sans risque** a pour rendement instantané r_t .
- ii) Il existe un vecteur aléatoire adapté λ_t à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, appelé **prix du marché du risque** ou **primes de risque** tel que :

$$dS_t^i = S_t^i[(r_t - q_t^i)dt + \sum_{j=1}^k \sigma_j^i(t)(d\widehat{W}_t^j + \lambda_t^j dt)] = S_t^i[(r_t - q_t^i)dt + \sigma^i(t)(d\widehat{W}_t + \lambda_t dt)]$$

Le rendement local $b_t + q_t$ des titres risqués vérifie :

$$\mathbf{b}_t + \mathbf{q}_t = \mathbf{r}_t \mathbf{1} + \sigma_t \lambda_t.$$

[version dynamique de l'Arbitrage Pricing Theory, Ross '76]

Corollaire (réécriture de l'autofinancement).

- i) $dV_t = V_t r_t dt + (\delta S)_t \cdot [\sigma_t(d\widehat{W}_t + \lambda_t dt)],$
- ii) $d(e^{-\int_0^t r_s ds} V_t) = e^{-\int_0^t r_s ds} (\delta S)_t \cdot [\sigma_t(d\widehat{W}_t + \lambda_t dt)].$

1.4 Un premier pas vers la valorisation risque-neutre

On suppose $d \geq k$ (plus d'actifs que de sources de risques) et la matrice σ_t uniformément bornée.

Changement de probabilités. On définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(- \int_0^T \lambda_s \cdot d\widehat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T |\lambda_s|^2 ds \right) = L_T.$$

D'après théorème de Girsanov, bon changement de probabilité si $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une $\mathbb{P}$ -martingale ($\Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_T) = 1$).

Condition assurée par exemple si

- λ_t est bornée
- ou
- λ_t satisfait la condition de Novikov $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp \int_0^T \frac{1}{2} |\lambda_t|^2 dt \right) < +\infty$.

Alors, $\mathbf{W}_t = \widehat{\mathbf{W}}_t + \int_0^t \lambda_s ds$ est un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien.

Mesures martingales, probabilités risque-neutre

1. Processus de prix avec le $\mathbb{Q}$ -Brownien W :

$$dS_t^i = S_t^i((r_t - q_t^i)dt + \sigma_t^i dW_t).$$

Si $q \equiv 0$ et σ_t borné, les prix actualisés des actifs sont des $\mathbb{Q}$ -martingales

$$d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t^i) = (e^{-\int_0^t r_s ds} S_t^i) \sigma_t^i dW_t.$$

2. Portefeuille autofinçant avec le $\mathbb{Q}$ -Brownien W :

$$dV_t = r_t V_t dt + (\delta S)_t \cdot \sigma_t dW_t \quad (\Rightarrow \text{proba. risque neutre}),$$

$$d(e^{-\int_0^t r_s ds} V_t) = e^{-\int_0^t r_s ds} (\delta S)_t \cdot \sigma_t dW_t.$$

Portefeuilles actualisés $(e^{-\int_0^t r_s ds} V_t)_t$ sont des $\mathbb{Q}$ -martingales (locales).

Conséquence formelle : si le flux Ψ_T en T est à couvrir avec un portefeuille autofinçant, on devrait avoir

$$e^{-\int_0^T r_s ds} V_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r_s ds} \Psi_T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r_s ds} \Psi_T | \mathcal{F}_t).$$

$\Rightarrow$ Prix comptant de Ψ_T devrait être $C_t(\Psi_T, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T | \mathcal{F}_t).$

Que se passe t-il en cas de non-unicité de la *market price of risk* $(\lambda_t)_t$?

Cas de σ non inversible (vol stochastique ...).

- ➡ Plusieurs probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_\lambda$.
- ➡ Propriétés de martingales vraies sous toutes les proba $\mathbb{Q}_\lambda$.
- ➡ Mais unicité des prix par AOA

$$e^{-\int_0^t r_s ds} V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\lambda} (e^{-\int_0^T r_s ds} \Psi_T | \mathcal{F}_t)$$

pour tout λ .

- ➡ Quelle stratégie de couverture ?
- ➡ λ non unique “=” il existe des sources de risque dans le marché décorrélés de tout instrument négociable ➡ introduire des titres négociables (non redondants) pour compléter le marché (volatility swap...)

1.5 Valorisation risque-neutre

Théorème. Supposons que :

- nombre de titres de base risqués = celui des sources de bruit ;
- matrice σ_t inversible ;
- le (unique) prix du marché du risque λ_t bornée ;
- le taux d'intérêt r_t est minorée.

Alors le marché est complet, au sens où **tout flux Ψ_T intégrable** (vérifiant $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|\Psi_T|^{1+\epsilon}) < +\infty$, pour un $\epsilon > 0$) **est répliquable** par un portefeuille autofinanciant (pour une certaine stratégie δ) dont la valeur à la date t est :

$$\mathbf{C}_t(\Psi_T, T) = \mathbf{V}_t(\delta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T | \mathcal{F}_t].$$

La valeur actualisée $(e^{-\int_0^t r_s ds} C_t(\Psi_T, T))_t$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale (de $\mathbf{L}_1$).